Implizite Ableitungen

Teil 1 auf „höherem“ Schulniveau

(Teil 2 speziell für Studenten: 51020)

Datei 41105

Stand 4. Januar 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem einer jeden Bibliothek ist sehr oft das Suchen und Finden eines geeigneten Textes.
Da es sehr viele Texte zu Ableitungen gibt, die zudem noch über diverse Funktionenbereiche verteilt sind, habe ich diesen „Zentraltext für Ableitungen“ angefertigt.
Er bringt eine ziemlich tief gehende Übersicht über Ableitungen von allerlei Funktionen.
Und zu jedem Thema findet man Verweise auf andere Texte, die noch mehr Übungen bereitstellen.
Außerdem folgt jetzt gleich eine Übersichtsliste aller Funktionen, in denen es um das „handwerkliche“ Ableiten geht, also nicht um deren Anwendungen.

41100	Zentraltext für Ableitungen (Dieser Text)
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen. Beweis einiger Ableitungsregeln mit der Grenzwertmethode.
41102	Hier werden nur mit der Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel ganzrationale Funktionen abgeleitet, dann gebrochen-rationale Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und ebenso einfache Wurzelfunktionen. Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet,
41103	Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, Differenzierbarkeit.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel
43016	Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von Wurzelfunktionen, auch komplizierte Funktionen.
45015	Ableitung von Exponentialfunktionen.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von Logarithmusfunktionen
47015	Ableitung von trigonometrischen Funktionen
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten) Februar 2011.

Zum Inhalt dieses Textes

Das Thema implizit definierte Funktionen und implizites Ableiten ist im Gymnasium nur ein Randthema. Meistens wird es gar nicht erwähnt oder beim Thema Umkehrfunktionen nur gestreift. Studenten müssen es lernen. Darüber einen Text zu schreiben ist daher schwierig. An welcher Zielgruppe soll man sich orientieren.

Während man in der Schule eine implizite Gleichung wie $x = e^y$ oder $x = \sin y$ direkt in dieser Form ableitet, wird man in der Hochschule meist die Form wählen, dass alles links steht und rechts Null: „Implizite“ Gleichungen der Form $x - \sin y = 0$ sind dort häufiger anzutreffen. Aus dem Term der linken Seite wird dann eine Funktion F(x,y) mit zwei Variablen gemacht, die man nach x ableitet.

In Schulen wird dies wohl nur sehr selten durchgeführt, obwohl es keine Erschwernis darstellt und mit etwas Ausschmückung (Flächenbilder) sehr interessant wird.

Um allen gerecht zu werden, habe ich die meisten Beispiele daher auf verschiedene Arten dargestellt: Explizit wie $y = \sqrt{x}$ bzw. $y^2 = x$ oder implizit wie $y^2 - x = 0$ oder auch mit der Hilfsfunktion $F(x,y) = y^2 - x$. Jeder kann sich so seine Schreibweise heraussuchen.

Auf noch etwas sei hingewiesen: Man sollte stets darauf achten, dass die Nenner nicht 0 werden. Da es hier um Implizites Ableiten geht, habe ich diese Untersuchungen einfach unterschlagen!

Im Übrigen ist der ganze Text eine große Sammlung an Beispielen mit kaum Theorie.
Im Fortsetzungstext 51020 wende ich mich auf leicht höherem Niveau gezielter an Studenten.

Inhalt

1. Hinführung – Verwendung anderer Schreibweisen

(a) Erinnern Sie sich noch, warum man Funktionen einerseits so schreibt: $f(x) = x^2 - 2x - 3$, es andererseits aber auch die Schreibweise $y = x^2 - 2x - 3$ gibt?

Der eigentliche Hintergrund dieser Geschichte liegt darin, dass man zu dieser Funktion ein Schaubild erstellen kann. Zwischen Funktion und Schaubild gibt es einen logisch streng getrennten Hintergrund: Eine Funktion ist ein algebraisches Gebilde, nämlich eine eindeutige Zuordnung, die hier durch eine Berechnungsvorschrift gegeben ist. Sie ordnet jeder Zahl des Definitionsbereichs einen Funktionswert zu. Aus Zahl x und Funktionswert f(x) kann man Zahlenpaare bilden, die man dann auch so schreiben kann: $(x \mid f(x))$. Ein Beispiel ist etwa $(5 \mid 12)$, denn es ist $f(5) = 25 - 10 - 3 = 12$.

In zweidimensionalen Achsenkreuzen (Koordinatensystemen) kann man andererseits Punkte durch zwei Koordinaten darstellen. Die Lage des Punktes, der die Koordinaten $(5 \mid 12)$ ist demnach klar definiert: 5 ist die x-Koordinate und 12 die y-Koordinate. Punkte sind geometrische Elemente, und eine Linie oder Kurve natürlich auch. Und so kann man natürlich Punktepaare, die durch eine Funktion gebildet werden können im Koordinatensystem darzustellen. Jetzt kommt der entscheidende Schritt:

Man verwendet den Funktionswert als y-Koordinate. Also wird $y = f(x)$.
Man kann daher dann auch y als kürzere Schreibweise für f(x) interpretieren.

Daher ist es natürlich auch möglich, für die Ableitungsfunktion die y-Schreibweise zu verwenden:
Aus $f(x) = x^2 - 2x - 3$ wird durch Ableiten: $f'(x) = 2x - 2$. Oder in der y-Schreibweise:
Aus $y = x^2 - 2x - 3$ wird durch Ableiten: $y' = 2x - 2$.

(b) Jetzt folgen einige Gedankenspiele, die zu einem wichtigen Ergebnis führen:

Die Gleichung $\boxed{y = x^2 - 2x - 3}$ (1)

kann man umstellen zu $\boxed{y - x^2 + 2x + 3 = 0}$. (2)

Diese neue Gleichung stellt nicht mehr die Funktion f bzw. y dar. Vielmehr ist durch diese Umstellung „Alles nach links" ein Term **mit zwei Variablen** entstanden. Diesen kann man mit $F(x,y)$ abkürzen.

Dieser Term definiert eine neue Funktion mit 2 Variablen: $\boxed{F(x,y) = y - x^2 + 2x + 3}$. (3)

Damit kann man dann Gleichung (2) so schreiben: $\boxed{F(x,y) = 0}$ (4)

Wir wollen zwei Funktionswerte berechnen:

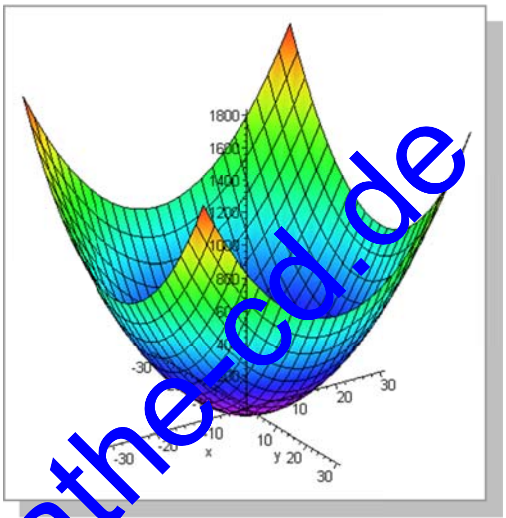
Zu x = 5 und y = 4 gehört: $F(5,4) = 4 - 5^2 + 2 \cdot 5 + 3 = 4 - 25 + 10 + 3 = -8$
Zu x = 5 und y = 12 gehört: $F(5,12) = 12 - 5^2 + 2 \cdot 5 + 3 = 12 - 25 + 10 + 3 = 0$
Zu x = 0 und y = -3 gehört: $F(0,-3) = -3 - 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 0$

Immer wenn das Ergebnis 0 ist, gehört das eingesetzte Zahlenpaar zu einem Punkt unserer Parabel.

Information: Warum sind diese Funktionen F(x,y) von Interesse?

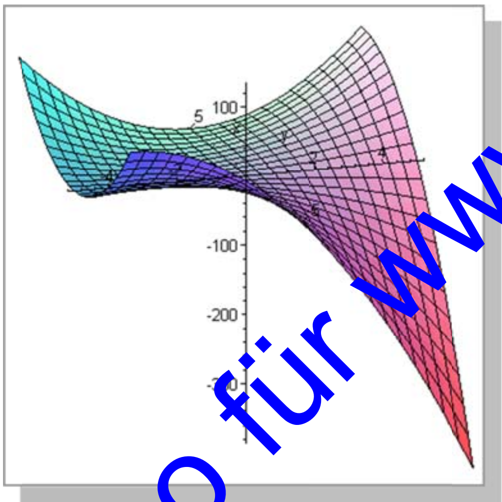
Solche Funktionen mit zwei Variablen kann man auch grafisch darstellen. Dazu benötigt man ein dreidimensionales Achsenkreuz, und das Schaubild ist eine Fläche im Raum mit der Gleichung $z = F(x,y)$. Hier zwei Beispiele aus dem Text 51011:

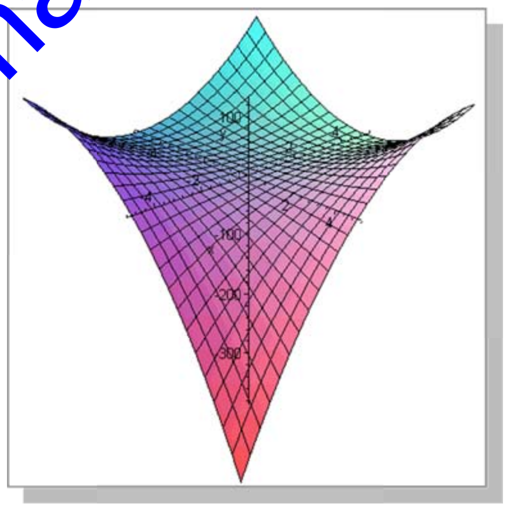
a) $z = F(x,y) = x^2 + y^2$



Schneidet man diese Fläche mit einer Ebene, die parallel zur x-y-Ebene ist, dann erhält man eine Schnittkurve in dieser Ebene. Beispiel:
Die Gleichung z = 16 stellt die Ebene dar, die im Abstand 16 parallel zur x-y-Grundebene ist.
Schneidet man die Fläche mit dieser Ebene, erhält man durch Gleichsetzen: $x^2 + y^2 = 16$, und das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius 4.

b) $z = F(x,y) = 5xy + x^2y - xy^2$





Diese Fläche schneide ich jetzt mit der x-y-Ebene, welche die Gleichung z = 0 hat.

Durch Gleichsetzen folgt: $5xy + x^2y - xy^2 = 0$.

Dies ist die Gleichung der Schnittkurve in „impliziter Darstellung", denn sie ist nicht nach y umgestellt, was die explizite Darstellung wäre.

Zu Funktionen bzw. Kurven berechnet man sehr oft die Ableitung, weil man beispielsweise Tangentensteigungen oder anderes bestimmen will.

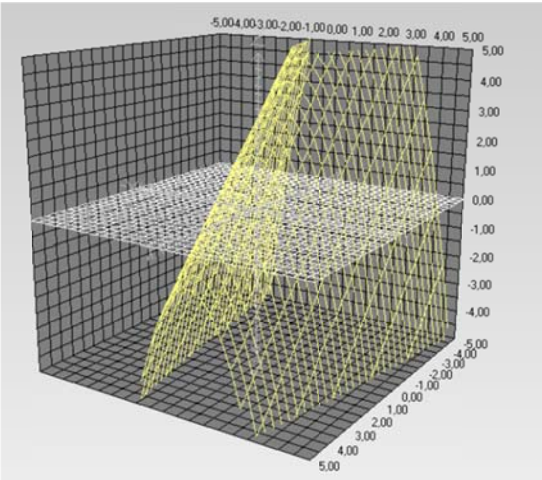
In der expliziten Gleichung $y = f(x)$ kann man (vielleicht) die Ableitung bestimmen. Jedoch ist diese vielleicht zu kompliziert, oder es gelingt gleich gar nicht, die impliziten Gleichung nach y umzustellen. Dann muss man die implizite Gleichung nach x ableiten, also im Grunde die auf der linken Seite stehende Funktion, die hier $F(x,y) = 5xy + x^2y - xy^2$ heißt.

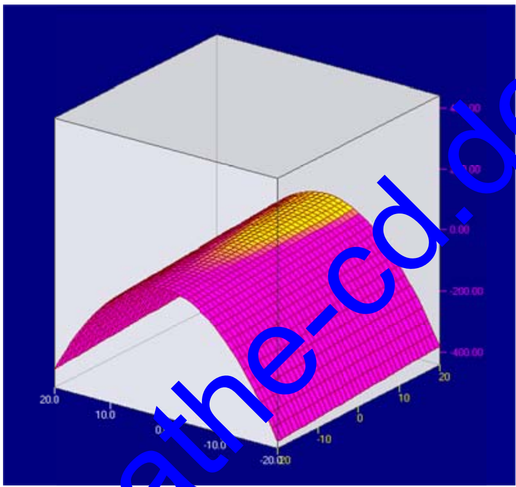
Auf Seite 3 wurde die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ bzw. die Parabel $y = x^2 - 2x - 3$ betrachtet.

Aus dieser expliziten Gleichung kann man eine implizite Gleichung machen: $\boxed{y - x^2 + 2x + 3 = 0}$

Die linke Seite gehört zur Funktion $\boxed{z = F(x,y) = y - x^2 + 2x + 3}$

Hier zwei dreidimensionale Darstellungen der Fläche in verschiedenen Maßstäben.





In der linken Abbildung erkennt man in weißer Farbe die x-y-Ebene (z = 0). Die Schnittkurve ist „natürlich" unsere Parabel, denn durch Gleichsetzen von $F(x,y) = y - x^2 + 2x + 3$ mit z = 0 folgt ja gerade $y - x^2 + 2x + 3 = 0$ bzw. $y = x^2 - 2x - 3$.

Die Ableitungsfunktion berechnet man aus $y = x^2 - 2x - 3$ so: $y' = 2x - 2$.

Oder aus der impliziten Gleichung $y - x^2 + 2x + 3 = 0$ so: $y' - 2x + 2 = 0$

woraus natürlich auch folgt: $y' = 2x - 2$.

Unser Thema heißt Ableiten:

Wir können unsere Funktion auf zwei Arten ableiten:

ischt

Oft stellt man diese Gleichung so dar, dass rechts 0 steht, was aber nicht nötig ist.

Und nun einige Zeilen für Studenten:

Die Ableitung der implizit dargestellten Funktion $y - x^2 + 2x + 3 = 0$

zu $y' - 2x + 2 = 0$

ist im Grunde ein „implizites“ Ableiten der Funktion $z = F(x,y) = y - x^2 + 2x + 3$

nach x. Dabei wird aus y dann y‘. Und weil 0 abgeleitet 0 bleibt, steht dann rechts = 0.

<u>Neue Schreibweise:</u>

Die Ableitung der Funktion $F(x,y)$ nach x schreibt man so: $\frac{d}{dx}F(x,y) = y' - 2x + 2$

Das Symbol $\frac{d}{dx}$ ist ein Befehlt und heißt „differenziere nach x“ (d. h. leite nach x ab).

Motivation:

Diese Form des impliziten Ableitens ist in vielen Fällen nicht notwendig, wenn man die implizite Gleichung nach y umstellen kann.

Wie aber will man die Funktion y = f(x) ableiten, welche in $z = F(x,y) = 5xy + x^2y - xy^2 = 0$ implizit verborgen steckt, oder in $F(x,y) = y^2 \cdot x - x^2 \cdot y - 4 = 0$?

Hier wird man implizit ableiten. Und das wird gleich geübt!

> Wenn in der Schule das implizite Ableiten behandelt wird, dann wird man wohl kaum auf so schwere Beispiele hinaus, die durch Schnitt von Flächen mit Ebenen entstehen. Daher wird dieser Text zweigeteilt. Ab jetzt folgen einfache Beispiele, wie man sie im Unterricht behandeln kann. Im Teil 2 (Nummer 51020) wird es dann um Beispiele gehen, die eher im Hochschulbereich auftauchen.

Wie gesagt, die Beispiele, bei denen sich in der Schule das implizite Ableiten wirklich lohnt, sind nicht sehr zahlreich. Daher werden einige der folgenden Beispiele vielleicht erscheinen, wie an den Haaren herbeigezogen ….

Nach einigen Seiten:

d) $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ kann man auch so schreiben: $\boxed{y=\sqrt{x}}$ (1)

Explizite Ableitung von $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$: $\boxed{y'=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ (1')

Wenn man die Ableitung des Quadratwurzelterms umgehen will, muss man die Gleichung quadrieren und kommt auf: $y^2=x$

Implizite Form (wurzelfrei): $\boxed{y^2-x=0}$ (2)

Implizite Ableitung: $\boxed{2y\cdot y'-1=0}$ (2')

Jetzt benötigte man die Kettenregel. Diese sagt uns ja auch, dass man $(3x+1)^2$ nicht einfach nach $2\cdot(3x+1)^1$ ableiten darf, sondern dass die innere Ableitung, also die Ableitung der Klammer als Faktor dazukommt: $(3x+1)^2 \xrightarrow{\text{Ableiten}} 2\cdot(3x+1)^1\cdot 3$.

Daher gilt hier auch: $y^2 \xrightarrow{\text{Ableiten}} 2y\cdot y'$.

Umstellen nach y': $2y\cdot y'=1$ | :2y

$\boxed{y'=\frac{1}{2y}}$ (3)

$y=\sqrt{x}$ einsetzen: $\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ (1')

Ergebnis auf diesem Weg: $\boxed{f(x)=\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Man beachte, dass man mit dieser impliziten Ableitung keine Wurzelregel verwendet haben.

Oder mit der Hilfsfunktion: $\boxed{F(x,y)=y^2-x}$

Ableitung nach x: $\boxed{\frac{d}{dx}F(x,y)=2y\cdot y'-1}$

Setzt man dies 0 und stellt nach y' um, folgt (3)

Usw.